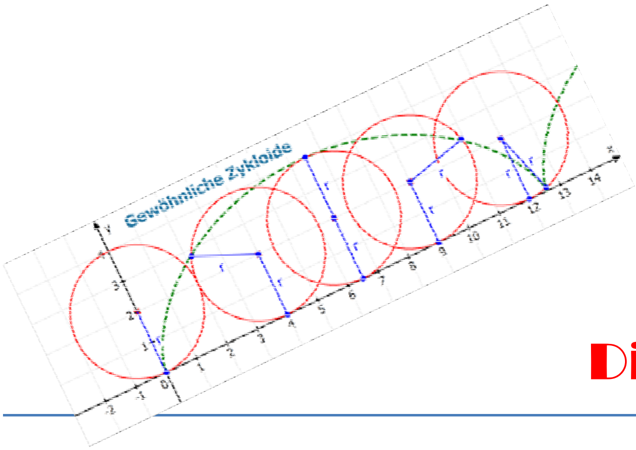
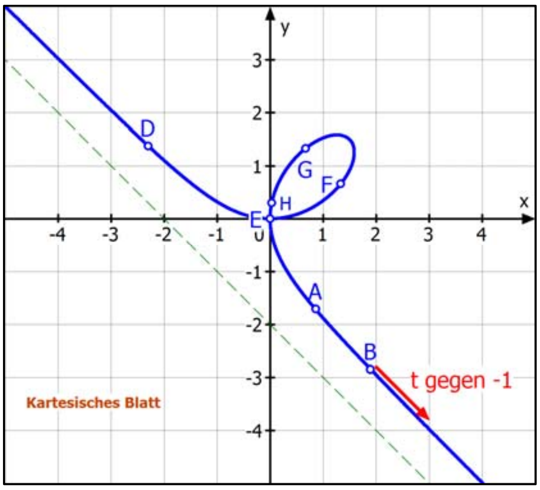
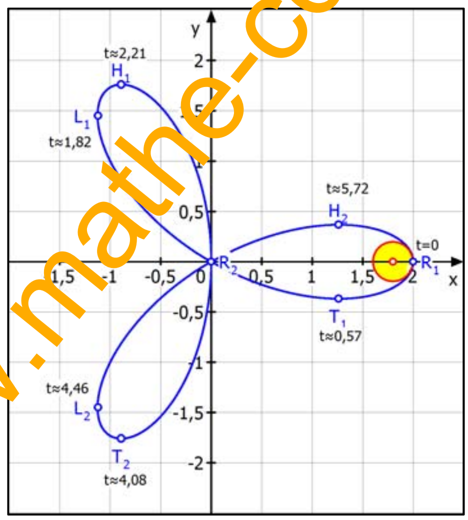


Funktionen und Kurven

Differentialgeometrie





Text Nummer: 54011

Stand: 28. Februar 2024

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort

Das Thema „Kurven“ ist sehr umfangreich. Ich habe sehr lange recherchiert, um herauszufinden, was das Internet so alles anbietet, oder mit anderen Worten, welche Kurvenarten und welche Fragestellungen zu untersuchen sind.

Ich habe jetzt abschließend die Stoffverteilung so vorgenommen, dass ich im Text 54010 zunächst beschreibe, was für Arten von Kurvengleichungen auftreten können. An Hand einiger Beispiele zeige ich dann, wie man sie ineinander umrechnen kann. Diesen Text sollte man ansehen, bevor man sich in den vorliegenden Text hineinarbeitet.

Im vorliegenden geht es um Kurvendiskussionen, was man auch unter dem Namen **Differentialgeometrie** zusammenfasst. Ich befasse mich dabei in erster Linie mit der Darstellung der Kurven in Parameterform oder mit Polarkoordinaten. Die impliziten Gleichungen der Form $F(x,y)=0$ werden nur am Rande gestreift. Dazu wird gelegentlich ein eigener Text erstellt. Wer also mit partiellen Ableitungen nicht umgehen kann, wird diese kleinen Abschnitte wohl überspringen.

Quellen:

Danke an Herrn Andrè Mössner vom Gymnasium Kantonsschule Zug Schweiz, der mir mit seiner Arbeit „Geometrie der Kurven“, die im Internet zu finden ist, einige Anregungen gegeben hat.

Ebenso danke ich Herrn Gerhard Heinscho für seine Manuskripte „Rollkurven - Vom Spiel zum PC“, ebenfalls aus dem Internet.

Inhalt

1 Ableitungen

1.1 Vektordarstellung von Parameterkurven

Als Schüler lernt man, dass die geometrische Darstellung einer Funktion zu Schaubildern führt. Diese nennt man meist Funktionsgraph oder auch Kurven. Bei Funktionen liegt dabei eine eindeutige Zuordnung $x \to y = f(x)$ vor. Dann aber gibt es Kurvenbeispiele (Kreis, Ellipse, in x-Richtung geöffnete Parabel usw.), die nicht mehr Schaubild einer Funktion sein können, weil die Zuordnung $x \to y$ nicht mehr eindeutig ist.

Bei vielen Kurven kann man die Punkte auch mittels eines Parameters berechnen, der meistens t genannt wird, weil dazu auch oft die Vorstellung passt, dass t eine Zeit angibt. Dadurch erscheint die Kurve als Darstellung einer Bewegung. Auf Seite 6 des Textes 54010 wurde dazu der waagrechte Wurf als Beispiel angeführt.

Für die wissenschaftlich betriebene Mathematik ist es an dieser Stelle notwendig, den Begriff **Kurve** zu definieren.

Definition:

Eine **Kurve** C ist eine Abbildung $t \to \vec{x}(t)$, die jedem Wert t eines Intervalls $D_t = [a\,;b]$

eindeutig einen Vektor $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ der Menge $\mathbb{R}^n$ zuordnet.

t heißt der **Kurvenparameter**, der Vektor heißt **Parameterdarstellung** der Kurve C.

Der Punkt $A = (x_1(a) \mid x_2(a) \mid \dots \mid x_n(a))$ heißt **Anfangspunkt** der Kurve und entsprechend dazu ist $B = (x_1(b) \mid x_2(b) \mid \dots \mid x_n(b))$ ihr **Endpunkt**.

Damit besitzt die Kurve eine **Durchlaufrichtung** oder **Orientierung**.

Im Falle n = 2 spricht man von einer ebenen Kurve, im Falle n = 3 von einer räumlichen Kurve.

Beispiele:

a) $t \to \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \overset{\text{oder}}{=} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2+4 \end{pmatrix}$ stellt eine Parabel dar.

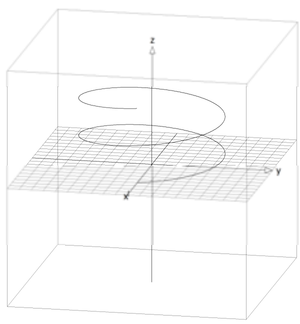
Im Text 54010 wird gezeigt, wie man daraus die Koordinatengleichung $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ erhält.

b) $t \to \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \overset{\text{oder}}{=} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos(t) \\ 4\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$ stellt einen Kreis dar.

Er hat diese Koordinatengleichung $x^2 + y^2 = 16$:

c) Die **Schraubenlinie** (Helix): $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\sin(t) \\ r\cdot\cos(t) \\ c\cdot t \end{pmatrix}$, $t \in [-2\pi\,;4\pi]$

ist eine räumliche Kurve.



1.2 Die 1. Ableitung von Parameterkurven – Tangenten und Normalen

Wir betrachten differenzierbare Funktionen $x \to \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, d. h. x(t) und y(t) seien differenzierbar.

Beispiele

a) $t \to \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2+4 \end{pmatrix}$

Koordinatenweises Ableiten: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2t \end{pmatrix}$, denn $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 2$ und $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = -2t$

(Die Ableitung nach (der Zeit) t bezeichnet man in der Regel durch einen Punkt.)

Durch Division entsteht: $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = y'(x)$

Andererseits entsteht: $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{-2t}{2} = -t = -\frac{1}{2}x$

Kontrolle mit der parameterfreien Darstellung:

Die Funktion $x(t) = 2t$ ist streng monoton und daher umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist $t = \frac{1}{2}x$. Setzt man t in $y(t)$ ein, folgt $y(x) = -\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 4$ bzw. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Leitet man diese Funktion ab, folgt $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x$. Man erhält (natürlich) dasselbe!

Also hat man folgende Möglichkeit, Ableitungen zu berechnen: $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

Den Vektor $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ nennt man **Tangentenvektor** oder **Geschwindigkeitsvektor.**

Die Gleichung einer Tangente kann man mit der **Punktsteigungsform** $y - y_1 = m(x - x_1)$ aufstellen oder mit dem **Tangentenvektor**: $\vec{x} = \vec{x}_1 + k \cdot \dot{\vec{x}}(t)$

Analoges gilt für die Gleichung einer Normalen: Da eine **Normale** auf einer Tangente senkrecht steht, verwendet man als Steigung für die Normale den negativen Kehrwert.
Für die vektorielle Normalengleichung verwendet man den **Normalenvektor** als Richtungsvektor. Dieser entsteht aus dem Tangentenvektor durch Vertauschen der Koordinaten und Änderung des Vorzeichens einer Koordinate.

Beispiel: Eine Tangente habe die Steigung $m_T = 2$, was man durch einen Tangentenvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ realisieren kann. Die Normale hat dann die Steigung $m_N = -\frac{1}{2}$, was man mit dem **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ erreicht.

Hinweis: Die **Punktsteigungsform** lässt sich umformen:

$$y(t) - y(t_1) = y'(t_1)\left(x(t) - x(t_1)\right) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) - y(t_1) = \frac{\dot{y}(t_1)}{\dot{x}(t_1)}\left(x(t) - x(t_1)\right)$$

$$\frac{y(t) - y(t_1)}{x(t) - x(t_1)} = \frac{\dot{y}(t_1)}{\dot{x}(t_1)}$$

So wird sie auch oft für Parameterkurven angegeben.

b) Tangenten und Normalen an einen Kreis.

Gegeben sei der Kreis $t \to \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos(t) \\ 4\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$ (1)

Berechnung der Ableitung: $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot\sin(t) \\ 4\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$ (2) Tangentenvektor

Tangentensteigung: $y'(x) = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \dfrac{4\cdot\cos(t)}{-4\cdot\sin(t)} = -\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} = -\dfrac{1}{\tan(t)} = -\cot(t)$ (3)

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos(t) \\ -4\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$ (4)

Dies ist die aus der Schule fast verschwundene Kotangensfunktion (Kehrwert des Tangens).

Andererseits hat dieser Kreis die Gleichung $x^2 + y^2 = 16$ und die beiden Halbkreisfunktionen

$y_1 = \sqrt{16 - x^2}$ bzw. $y_2 = -\sqrt{16 - x^2}$. Deren Ableitungen sind dann $y_{1,2}' = \pm\dfrac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = \pm\dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$.

(A) Gleichungen der Tangente und Normale für $t = \frac{1}{4}\pi$.

Kreispunkt: $\vec{x}\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ d. h. $P_1\left(2\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2}\right)$

Tangentensteigung: $y'\left(2\sqrt{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = -\dfrac{1}{1} = -1$

Oder so: $y'\left(2\sqrt{2}\right) = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \dfrac{-\cancel{2}\cdot 2\sqrt{2}}{\cancel{2}\sqrt{16-\left(2\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{-\cancel{2\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{8}}} = -1$

Aus der Punktsteigungsform erhält man dann die

Tangente: $y - 2\sqrt{2} = -1\cdot\left(x - 2\sqrt{2}\right)$ d. h. $y = -x + 4\sqrt{2}$

Oder vektoriell: Tangentenvektor in P_1: $\dot{\vec{x}}\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \begin{pmatrix} \dot{x}\left(\frac{1}{4}\pi\right) \\ \dot{y}\left(\frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \\ 4\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit dem verkürzten Richtungsvektor: Tangente: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normale in $P_1\left(2\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2}\right)$**:** **Steigung:** $m_N = -\dfrac{1}{m_T} = +1$

Punktsteigungsform: $y - 2\sqrt{2} = 1\cdot\left(x - 2\sqrt{2}\right)$ d. h. $y = x$

Vektoriell: Normalenvektor in P_1: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) Tangente und Normale für t = 0:

Kreispunkt: $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot\cos(0)\\4\cdot\sin(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow P_2(4\,|\,0)$

Tangentensteigung: $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ und $y'(4)=-\dfrac{1}{\tan(0)}="\dfrac{1}{0}=\infty"$

d. h. der Kreis hat in P_2 eine <u>senkrechte Tangente</u>: „x = 4“

Hinweis: Das erfährt man auch so: $y'(4)="\pm\dfrac{-8}{2\sqrt{16-16}}"="\infty"$

Vektoriell: **Tangentenvektor:** $\dot{\vec{x}}(0)=\begin{pmatrix}-4\cdot\sin(0)\\4\cdot\cos(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Tangente: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Normale in P_2: Steigung: $m_N=-\dfrac{1}{m_T}=\tan(0)=0$

d. h. horizontale Gerade durch $P_2(4\,|\,0)$, also die x-Achse: y = 0.

Vektoriell: ***Normalenvektor:*** $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Normale: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

(C) Tangente und Normale für t = $\frac{5}{6}\pi$

Kreispunkt: $\vec{x}\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)=\begin{pmatrix}4\cdot\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)\\4\cdot\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\\4\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow P_3\left(-2\sqrt{3}\,|\,2\right)$

Tangentenvektor: $\dot{\vec{x}}\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)=\begin{pmatrix}-4\cdot\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\\4\cdot\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\cdot\frac{1}{2}\\4\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$

Tangentensteigung: $y'\left(-2\sqrt{3}\right)=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$ oder so: $y'=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{5}{6}\pi\right)}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

Tangente in $P_3\left(-2\sqrt{3}\,|\,2\right)$***:***

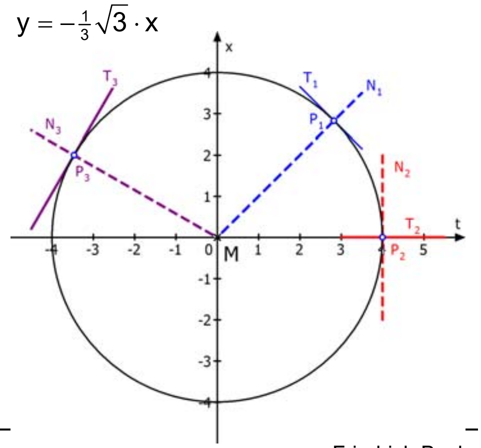
Punktsteigungsform $y-2=\sqrt{3}\cdot\left(x+2\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow y=\sqrt{3}\cdot x+8$

Vektoriell: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Normale in $P_3\left(-2\sqrt{3}\,|\,2\right)$ **:** **Steigung:** $m_N=-\dfrac{1}{m_T}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

Punktsteigungsform: $y-2=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\left(x+2\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot x$

Vektoriell: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$



Waagrechte und senkrechte Tangenten finden

Wir haben beim Beispiel des Kreises gesehen, dass es im Punkt P_2 eine senkrechte Tangente gibt.

Dort hat eine Tangente eine unendlich große Steigung. Da man die Tangentensteigung durch

$y'(x) = \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ berechnet, folgt, dass im Falle

$\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{y}(t) \neq 0$ der Wert von y' unendlich groß ist: **senkrechte Tangente.**

$\dot{y}(t) = 0$ und $\dot{x}(t) \neq 0$ die Tangentensteigung 0 ist, was auf **waagrechte Tangente** hinweist.

Tritt der Fall auf, dass beide, also Zähler und Nenner 0 werden, dann kann der Satz von de L'Hospital weiterhelfen, was ich später am Beispiel einer Zykloide zeige.

Doch nun müssen wir zuerst lernen, wie man zweite Ableitungen berechnet.

1.3 Die 1. Ableitung in Polarkoordinaten

Wenn eine Kurve durch die Gleichung $r = r(\varphi)$ gegeben ist, erstellt man mit Hilfe von $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$ zwei Gleichungen, in denen dann φ als Parameter auftritt. Dann gilt wie zuvor $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Beispiel: Für die Archimedische Spirale gilt $r = 2\varphi$.

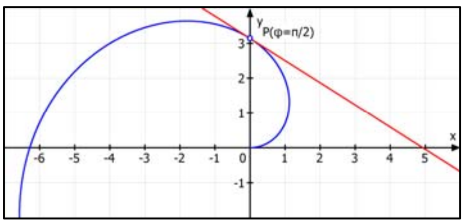
Also erhält man diese Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r \cdot \cos(\varphi) = 2 \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi) \\ y(\varphi) &= r \cdot \sin(\varphi) = 2 \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Ableitungen nach φ mit der Produktregel:

$$\dot{x}(\varphi) = 2 \cdot \cos(\varphi) + 2\varphi \cdot (-\sin(\varphi)) = 2(\cos(\varphi) - \varphi \cdot \sin(\varphi))$$
$$\dot{y}(\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) + 2\varphi \cdot \cos(\varphi) = 2(\sin(\varphi) + \varphi \cdot \cos(\varphi))$$

Tangentensteigung: $y' = \dfrac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)} = \dfrac{\sin(\varphi) + \varphi \cdot \cos(\varphi)}{\cos(\varphi) - \varphi \cdot \sin(\varphi)}$.



Wenn $\varphi \neq \frac{1}{2}\pi$ ist, kann man durch $\cos(\varphi)$ kürzen:

$$y' = \frac{\tan(\varphi) + \varphi}{1 - \varphi \cdot \tan(\varphi)}$$

Tangente für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Kurvenpunkt: $\vec{x}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} \pi \cdot \cos(\pi/2) \\ \pi \cdot \sin(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} \Leftrightarrow P(0 \mid \pi)$

Tangentensteigung $y' = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\pi \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \frac{1}{2}\pi \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}\pi \cdot 0}{0 - \frac{1}{2}\pi \cdot 1} = -\dfrac{2}{\pi}$

Tangentengleichung: $y = -\frac{2}{\pi} \cdot x + \pi \Leftrightarrow y \approx -0{,}637 \cdot x$

1.4 Die 2. Ableitung in Parameterdarstellung

Wir hatten ermittelt: $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

Mit Kettenregel und Quotientenregel erhält man daraus die 2. Ableitung:

$$\boxed{y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) \overset{(1)}{=} \frac{d}{dt}(y')\cdot\frac{dt}{dx} \overset{(2)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\cdot\frac{1}{\dot{x}(t)} \overset{(3)}{=} \frac{\ddot{y}(t)\cdot\dot{x}(t)-\ddot{x}(t)\cdot\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t))^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}(t)} = \frac{\ddot{y}(t)\cdot\dot{x}(t)-\ddot{x}(t)\cdot\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t))^3}}$$

Erklärungen dazu:

(1) Da $y(x)$ von x abhängt, benötigt man die Kettenregel, d. h. man leitet y' zuerst nach t ab, und dann t(x) nach x, was man als innere Ableitung kennt.

Beispiel: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t^3 - 2t + 1 \end{pmatrix}$. Zuerst die explizite Gleichung: $x(t) = \frac{1}{2}t \Rightarrow t(x) = 2x$

t in y(t) ersetzen: $y(t) = t^3 - 2t + 1 = 8x^3 - 4x + 1 = y(x)$

Daraus folgt: $y'(x) = 24x^2 - 4$ und $y''(x) = 48x$

Ersetzt man hierin t: $y'(t) = 24\cdot\left(\frac{1}{2}t\right)^2 - 4 = 6t^2 - 4$

Nun die Ableitung der Parameterform:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3t^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $y''(x) = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(6t^2-4\right)}_{y'(t)}\cdot\frac{dt}{dx} = 12t\cdot 2 = 24\cdot t$

Ersetzt man hierin t: $y''(x) = 24\cdot 2x = 48x$

(2) Hier wurde dann $y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ eingesetzt.

Diesen Bruch muss man anschließend nach t ableiten.

Und da $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ ist, gilt für den Kehrwert $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}(t)}$

(3) Der große Bruch entsteht durch Anwendung der Quotientenregel auf $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

Merke also: $\boxed{y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \quad \text{und} \quad y''(x) = \frac{\dot{x}\cdot\ddot{y}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\dot{x}^3}}$

Man kann sich den Zähler dieses Bruches auch *so merken*:

Er lässt sich als **Determinante schreiben**: $\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix} = \dot{x}(t)\cdot\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\cdot\dot{y}(t)$

Und dann ist der Nenner mit seiner 3. Potenz interessant …

1.5 Trainingsaufgaben

Aufgabe 1 Gegeben ist eine Ellipse durch $x(t) = 4 \cdot \cos(t)$ und $y(t) = 3 \cdot \sin(t)$ für $t \in [0; 2\pi]$.

a) Bestimme ihre Koordinatengleichung

b) Berechne y' und y''

c) Bestimme die Gleichung der Tangente und den Krümmungswert für $t = \frac{1}{4}\pi$.

d) Bestimme die Gleichung der Tangente und den Krümmungswert für x = -2.

Aufgabe 2 Gegeben ist eine Ellipse durch

$x(t) = 3 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \sin(t)$ und $y(t) = 2 \cdot \cos(t) + 6 \cdot \sin(t)$ für $t \in [0; 2\pi]$.

a) Berechne die Gleichungen der Tangenten für t = 0, t = $\frac{1}{3}\pi$ und $t = \frac{1}{2}\pi$.

b) Wo hat diese Kurve senkrechte Tangenten?

Aufgabe 3 Gegeben ist die Kurve K durch $x(t) = 2 \cdot \sin t$ und $y(t) = 2 \cdot \sin\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right)$ für $t \in [0; 2\pi]$.

a) Berechne die Formeln für y' und y''.

b) Stelle die Gleichungen der Tangenten für $t = 0$ und $t = \frac{1}{4}\pi$ auf.

c) Bestimme Hoch- und Tiefpunkte sowie Rechts- und Linkspunkte, also die Punkte mit waagerechten oder senkrechten Tangenten.

Aufgabe 4 Gegeben ist eine Zykloide durch $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t - 2 \cdot \sin(t) \\ 2 - 2 \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0; 2\pi]$

a) Berechne die Gleichungen der Tangenten für t = 0, t = $\frac{1}{4}\pi$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{3}{4}\pi$ und $t = \pi$.

b) Zeichne die Kurve und trage die Tangenten ein.

Aufgabe 5 Gegeben ist diese Kurve: $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos^3(\varphi) + 4 \cdot \cos(\varphi) \\ 4 \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ $\quad \varphi \in [\,0; 2\pi\,[$

a) Bestimme die vier Scheitel dieser Kurve (horizontale und vertikale Tangenten).

b) Welche Gleichung haben Tangente und Normale für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$?

c) Zeichne diese Tangente und Normale zusammen mit der Kurve.

Aufgabe 6 Gegeben ist die Kurve: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \ln(t) \\ 1 - \frac{2}{t+1} \end{pmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (Siehe 54010 Seite 21)

Info: Diese Kurve hat die Koordinatengleichung $y = \tanh(x)$ *(Tangens hyperbolicus)*

a) Berechne die Gleichung der Tangente für x = 0.

b) Berechne $y''(t = 0)$ und $y''(t = 5)$

c) Zeige dass die Kurve für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ verschiedene waagerechte Asymptoten hat.

Aufgabe 7 Gegeben ist die Kurve $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \sqrt{\sin(\varphi)+1} \\ 4 \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ $\quad \varphi \in [\,0\,;2\pi\,[$

a) Bestimme Definitionsbereich für x und Wertebereich für y.

b) Bestimme die vier Scheitel dieser Kurve (horizontale und vertikale Tangenten).

c) Welche Gleichung haben Tangente und Normale für $\varphi = 0{,}3$?

Aufgabe 8 Gegeben ist die Kurve K durch $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \\ 2 \cdot \cos^2(\varphi) + \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$ $\quad \varphi \in [\,0\,;2\pi\,[$

a) Bestimme den Wertebereich der Koordinatenfunktionen $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$.

Berechne Hochpunkte, Tiefpunkte, Rechts- und Linkspunkte.

Bestimme die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse.

Zeichne die Kurve (Wertetabelle mit einem geeigneten Rechner).

b) Zeige, dass K einen Doppelpunkt hat. Berechne ihn und die Kreuzungswinkel.

c) Welche Gleichung hat die Tangente im Punkt B für $\varphi = \pi$.

Aufgabe 9 Gegeben ist die Kurve K durch $r(\varphi) = 4 + e^{-\varphi}$, $\quad \varphi \geq 0$

a) Berechne die Tangenten für $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und die Tangentensteigung für $\varphi = \pi$.
Interpretiere das letzte Ergebnis.

b) Zeige, dass diese Kurve einen Kreis als Näherungskurve hat.
„Wann" ist $r(\varphi)$ nur noch weniger als 0,001 größer als 4?

Aufgabe 10 Gegeben ist die Kurve K durch $r(\varphi) = \dfrac{5}{\cos(\varphi)} + 5$ mit $\quad \varphi \in [\,0\,;2\pi\,[$

a) Bestimme eine Parameterdarstellung für K und gib die Wertmengen für $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ an.

b) Berechne eine Formel für die Tangentensteigung.
und die Tangentengleichung für $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

c) Berechne mit der Regel von de L'Hospital die Tangentensteigung im Ursprung.

Aufgabe 11 Gegeben ist die Kurvenschar K_t durch $r(\varphi,t) = \dfrac{4}{t+\varphi}$ für $\varphi \in [0\,;2\pi]$ und $t \geq 0$.

a) Berechne die Schnittpunkte von K_t mit der x-Achse.

b) Berechne die allgemeine Tangentensteigung y'.

c) Zeige, dass die Tangenten an die Scharkurven im linken Schnittpunkt mit der x-Achse durch einen von t unabhängigen Punkt Q gehen. Berechne diesen.

d) Zeige, dass K_O eine waagerechte Asymptote besitzt.

Aufgabe 12 Gegeben ist die Kurve K durch $x^3 - y^3 + 3y = 0$.

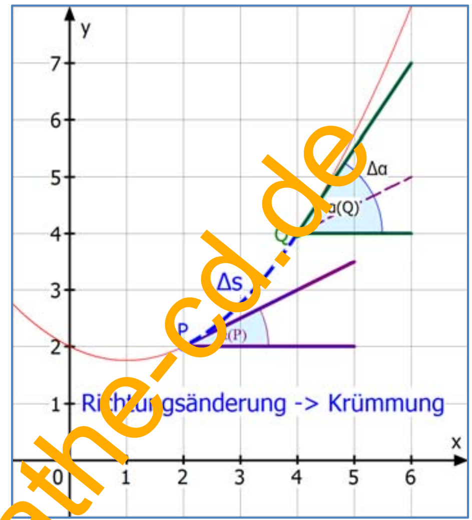
a) Berechne implizit y' und y''.

b) Stelle die Gleichungen der Tangenten in $P(2 \mid y_P)$ und $A(y_A \mid 2)$ auf.

c) In welchen Punkten hat K waagerechte bzw. senkrechte Tangenten?

2 Die Krümmung von Parameterkurven

2.1 Krümmungsformel für die Koordinatendarstellung



Mit der Krümmung beschreibt man, wie stark sich die Richtung der Tangente in einem gegen die Länge Null gehenden Bogenstück verändert.

In P Ist die Bewegungsrichtung (wenn man t als Zeit interpretiert) $\alpha(P)$. Bewegt man sich um den Bogen Δs weiter bis Q, und wird dort die Bewegungsrichtung durch den Winkel $\alpha(Q)$ angegeben, dann hat sich entlang des Bogens die Richtung um die Differenz $\Delta\alpha$ geändert.

Als mittlere Krümmung definiert man den Quotienten $\bar{\kappa} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$,

also die Winkeländerung pro Längeneinheit des Bogens.

Sehr oft wird hier der griechische Buchstabe κ (Kappa) verwendet, oft auch k.

Um die punktuelle (momentane) Krümmung zu erreichen, lässt man $\Delta s \to 0$ gehen.

Die Krümmung in P ist dann $\kappa(P) = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, vorausgesetzt, dieser Grenzwert existiert.

Nun sollte man sich erinnern, dass dieser Grenzwert des Differenzenquotienten die Ableitung, also der Differentialquotient ist: $\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$ (1)

Nun ist $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} : \frac{ds}{dx}$ (2)

(Das entspricht der Kettenregel: Man leitet α zuerst nach x ab, und dann noch x nach s, was der inneren Ableitung entspricht.)

α sei der Steigungswinkel: $m = \tan(\alpha) = y'(x)$

Umkehrung: $\alpha = \tan^{-1}(y')$ bzw. $\alpha = \arctan(y')$

WISSEN: Die Funktion f(x) = **arctan(x)** hat die Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Aus $\alpha = \arctan(y')$

folgt: $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d}{dx}(\arctan(y')) = \frac{1}{1+y'^2} \cdot \boxed{y''} = \frac{y''}{1+y'^2}$

wobei y'' die innere Ableitung (von y') ist.

Für die Bogenlänge gilt: $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$, also ist $s' = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$

Also erhält man aus (2) $\alpha' = \frac{d\alpha}{dx} : \frac{ds}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2} : \sqrt{1+y'^2} = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$

Ergebnis: Für die Krümmung einer Kurve gilt: $\kappa = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$ **(3)**

Rest im Original!